Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – estadística y probabilidad

Miércoles 18 de noviembre de 2015 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[60 puntos]**.

4 páginas

8815 – 7230

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 7]

Se sabe que la desviación típica de la estatura de los hombres de un determinado país es igual a $15{,}0\,\mathrm{cm}$.

(a) Se seleccionan al azar a cien hombres de ese país y se mide su estatura. La media de esta muestra fue igual a $185\,\mathrm{cm}$. Calcule un intervalo de confianza del $95\,\%$ para la media de la estatura de la población. [3]

(b) De esa misma población se toma una segunda muestra aleatoria de tamaño n. Halle el valor mínimo que tiene que tener n para que el ancho de un intervalo de confianza del $95\,\%$ sea inferior a $3\,\mathrm{cm}$. [4]

2. [Puntuación máxima: 11]

En la siguiente tabla se muestra la resistencia de una serie de vigas en función de su contenido de humedad. Puede suponer que tanto la resistencia como el contenido de humedad siguen una distribución normal.

Resistencia	21,1	22,7	23,1	21,5	22,4	22,6	21,1	21,7	21,0	21,4
Contenido de humedad	11,1	8,9	8,8	8,9	8,8	9,9	10,7	10,5	10,5	10,7

(a) Determine el coeficiente de correlación momento-producto para estos datos. [2]

(b) Realice, a un nivel de significación del $5\,\%$, un contraste de dos colas de la hipótesis de que la resistencia es independiente del contenido de humedad. [5]

(c) Si resulta que el contenido de humedad de una viga es igual a $9{,}5$, utilice la recta de regresión apropiada para hacer una estimación de la resistencia de la viga. [4]

3. [Puntuación máxima: 9]

Se seleccionan al azar dos alumnos de una escuela de gran tamaño donde hay el mismo número de niños que de niñas. Las estaturas de los niños siguen una distribución normal de media $178\,\text{cm}$ y desviación típica igual a $5{,}2\,\text{cm}$, mientras que las estaturas de las niñas siguen una distribución normal de media $169\,\text{cm}$ y desviación típica igual a $5{,}4\,\text{cm}$.

Calcule la probabilidad de que el alumno más alto de los dos seleccionados sea un niño.

4. [Puntuación máxima: 22]

Una variable aleatoria discreta U sigue una distribución geométrica con $p = \dfrac{1}{4}$.

(a) Halle $F(u)$, la función de distribución acumulada de U, para $u = 1, 2, 3 \ldots$ [3]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de $P(U > 20)$. [2]

(c) Demuestre que la función generatriz de probabilidad de U viene dada por $G_u(t) = \dfrac{t}{4 - 3t}$. [4]

(d) Sabiendo que $U_i \sim \text{Geo}\left(\dfrac{1}{4}\right)$, $i = 1, 2, 3$, y que $V = U_1 + U_2 + U_3$, halle

(i) $\text{E}(V)$;

(ii) $\text{Var}(V)$;

(iii) $G_v(t)$, la función generatriz de probabilidad de V. [6]

Una tercera variable aleatoria W tiene por función generatriz de probabilidad $G_w(t) = \dfrac{1}{(4 - 3t)^3}$.

(e) Derivando $G_w(t)$, halle $\text{E}(W)$. [4]

(f) Demuestre que $V = W + 3$. [3]

5. [Puntuación máxima: 11]

Un dado cúbico no equilibrado tiene las caras rotuladas $1, 2, 3, 4, 5$ y 6. La probabilidad de sacar un 6 es igual a p, mientras que la probabilidad de que salga cualquier otro resultado es la misma.

El dado se tira una vez y se anota el resultado X_1 que ha salido.

(a) (i) Halle $\mathrm{E}(X_1)$.

(ii) A partir de lo anterior, obtenga un estimador sin sesgo para p. [4]

El dado se tira una segunda vez y se anota el resultado X_2 que ha salido.

(b) (i) Muestre que $k(X_1 - 3) + \left(\frac{1}{3} - k\right)(X_2 - 3)$ también es un estimador sin sesgo para p para todos los valores de $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Halle el valor de k que maximiza la eficiencia de este estimador. [7]